6　2 次方程式の理論

50

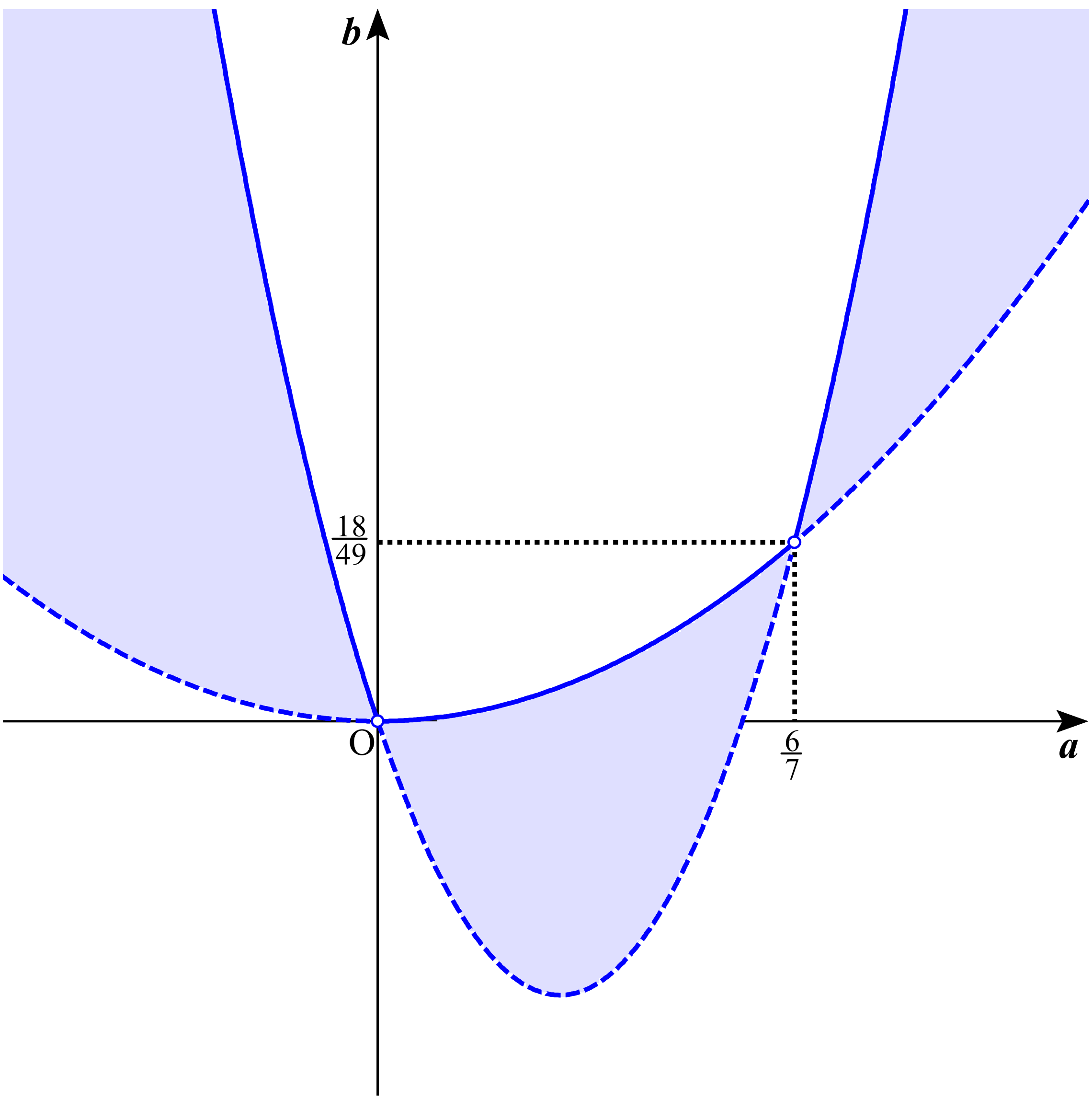
$x^2+2ax+2b=0$ の判別式を D_1， $x^2-4ax+3a+b=0$ の判別式を D_2 とすると，

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-2b,\ \dfrac{D_2}{4}=4a^2-3a-b$

いずれか一方だけ実数解をもつのは $\begin{cases} D_1 \geq 0 \\ D_2 < 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} D_1 < 0 \\ D_2 \geq 0 \end{cases}$ の場合だから，

$\begin{cases} a^2-2b \geq 0 \\ 4a^2-3a-b < 0 \end{cases}$ または $\begin{cases} a^2-2b < 0 \\ 4a^2-3a-b \geq 0 \end{cases}$ を満たす領域を図示すると下図のようになる。

破線の境界線は含まない。



51

(1)

$$\alpha^2+(3+2i)\alpha+k(2+i)^2=\alpha^2+(3+2i)\alpha+k(3+4i)$$
$$=\alpha^2+3\alpha+3k+i(2x+4k)$$
$$=0$$

より，$\begin{cases}\alpha^2+3\alpha+3k=0\\2\alpha+4k=0\end{cases}$

$2\alpha+4k=0$ より，$\alpha=-2k$

これを $\alpha^2+3\alpha+3k=0$ に代入し，整理すると，$k(4k-3)=0$

これと $k\neq 0$ より，$k=\dfrac{3}{4}$　$\therefore \alpha=2k=-\dfrac{3}{2}$

ゆえに，$(k,\ \alpha)=\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{3}{2}\right)$

(2)

(1)より，等式は $x^2+(3+2i)x+\dfrac{3}{4}(2+i)^2=0$ で，その 1 つの解は $-\dfrac{3}{2}$ である。

もう 1 つの解を β とすると，解と係数の関係より，$-\dfrac{3}{2}+\beta=-(3+2i)$　$\therefore \beta=-\dfrac{3}{2}-2i$

よって，$-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{3}{2}-2i$

52

$y=f(x)=x^2-2ax+2a+3$ とおくと，$f(1)=4>0$ より，

放物線 $y=f(x)$ が x 軸と $1\leq x\leq 5$ において異なる 2 つの共有点をもてばよい。

$$f(x)=x^2-2ax+2a+3$$
$$=(x-a)^2-(a+1)(a-3)$$

より，

軸 $x=a$ が満たすべき条件：$1<a<5$　・・・①

頂点の y 座標が満たすべき条件

放物線は下に凸だから，$-(a+1)(a-3)<0$　$\therefore a<-1,\ 3<a$　・・・②

$f(1)$ と $f(5)$ が満たすべき条件

$f(1)\geq 0$ かつ $f(5)\geq 0$

これと $f(1)=4$，$f(5)=28-8a$ より，$28-8a\geq 0$　$\therefore a\leq\dfrac{7}{2}$　・・・③

①かつ②かつ③より，$3<a\leq\dfrac{7}{2}$

53

$x^2+px+q=0$ について

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=-p$ ・・・① $\alpha\beta=q$ ・・・②

判別式を D_1 とすると，α,β は異なる実数解だから，$D_1=p^2-4q>0$ ・・・③

$x^2+qx+p=0$ について

解と係数の関係より，

$\alpha(\beta-2)+\beta(\alpha-2)=-q$ $\therefore 2\alpha\beta-2(\alpha+\beta)=-q$ ・・・④

$\alpha(\beta-2)\cdot\beta(\alpha-2)=p$ $\therefore(\alpha\beta)^2-2\alpha\beta(\alpha+\beta)+4\alpha\beta=p$ ・・・⑤

α,β は異なる実数解だから，$\alpha(\beta-2)\neq\beta(\alpha-2)$

よって，判別式を D_2 とすると，$D_2=q^2-4p>0$ ・・・⑥

①，②を④に代入すると，$2q+2p=-q$ $\therefore p=-\dfrac{3}{2}q$ ・・・⑦

①，②を⑤に代入すると，$q^2+2qp+4q=p$

これに⑦を代入し，整理すると，$\dfrac{q}{2}(4q-11)=0$ $\therefore q=0,\dfrac{11}{4}$

これと⑦より，$(p,q)=(0,0),\left(-\dfrac{33}{8},\dfrac{11}{4}\right)$

この 2 組のうち，③と⑥を満たすのは $(p,q)=\left(-\dfrac{33}{8},\dfrac{11}{4}\right)$

よって，$(p,q)=\left(-\dfrac{33}{8},\dfrac{11}{4}\right)$

54

(1)

判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=a^2-(a-1)$$
$$=a^2-a+1$$
$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

よって，α,β は異なる実数解である。

(2)

$\alpha<0$ または $\beta<0$ の否定は $\alpha\geq 0$ かつ $\beta\geq 0$ である。

補足：$\overline{(\alpha<0)\cup(\beta<0)}=\overline{(\alpha<0)}\cap\overline{(\beta<0)}=(\alpha\geq 0)\cap(\beta\geq 0)$

$\alpha\geq 0$ かつ $\beta\geq 0$ とすると，$\alpha\neq\beta$ だから，$\alpha+\beta=-2a>0$ かつ $\alpha\beta=a-1\geq 0$

すなわち $a<0$ かつ $a\geq 1$ （矛盾）

よって，$\alpha \geq 0$ かつ $\beta \geq 0$ は成り立たない。

ゆえに，$\alpha < 0$ または $\beta < 0$　すなわち α と β のうち，少なくとも 1 つは負である。

(3)

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2 &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \\ &= (-2a)^2-2(a-1) \\ &= 4a^2-2a+2 \\ &= 4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

また，$\alpha \leq 0,\ \beta \leq 0$ および $\alpha \neq \beta$ より，$\begin{cases}\alpha+\beta=-2a<0 \\ \alpha\beta=a-1 \geq 0\end{cases}$　$\therefore a \geq 1$

よって，$\alpha^2+\beta^2$ は $a=1$ のとき最小値 4 をとる。

55

(1)

$a+b=1-\dfrac{2}{3}$　$\therefore a+b=\dfrac{1}{3}$　・・・①

$a^2+b^2=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$　・・・②

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$　・・・③

①，②，③より，$\dfrac{1}{9}-2ab=\dfrac{5}{9}$　$\therefore ab=-\dfrac{2}{9}$　・・・④

①，④より，$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{2}{9}=0$ すなわち $9t^2-3t-2=0$ の解である。

よって，$9t^2-3t-2=(3t+1)(3t-2)=0$ より，$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right),\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

(2)

$a+b=1-c$　・・・⑤

$a^2+b^2=1-c^2$　・・・⑥

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$　・・・⑦

⑤，⑥，⑦より，$(1-c)^2-2ab=1-c^2$　$\therefore ab=c^2-c$　・・・⑧

⑤，⑧より，$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2-(1-c)t+c^2-c=0$ の解である。

これと $a,\ b$ は実数であることから，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D &= \{-(1-c)\}^2-4(c^2-c) \\ &= -(3c^2-2c-1) \\ &= -(3c+1)(c-1) \geq 0\end{aligned}$$

よって，$-\dfrac{1}{3} \leq c \leq 1$

56

(1)

解法 1：文字定数が a の 1 種類でしかも次数が 1 ⇒ 文字定数分離を試みる

(1)

①より，$a(x+1)=-x^2+x-2$

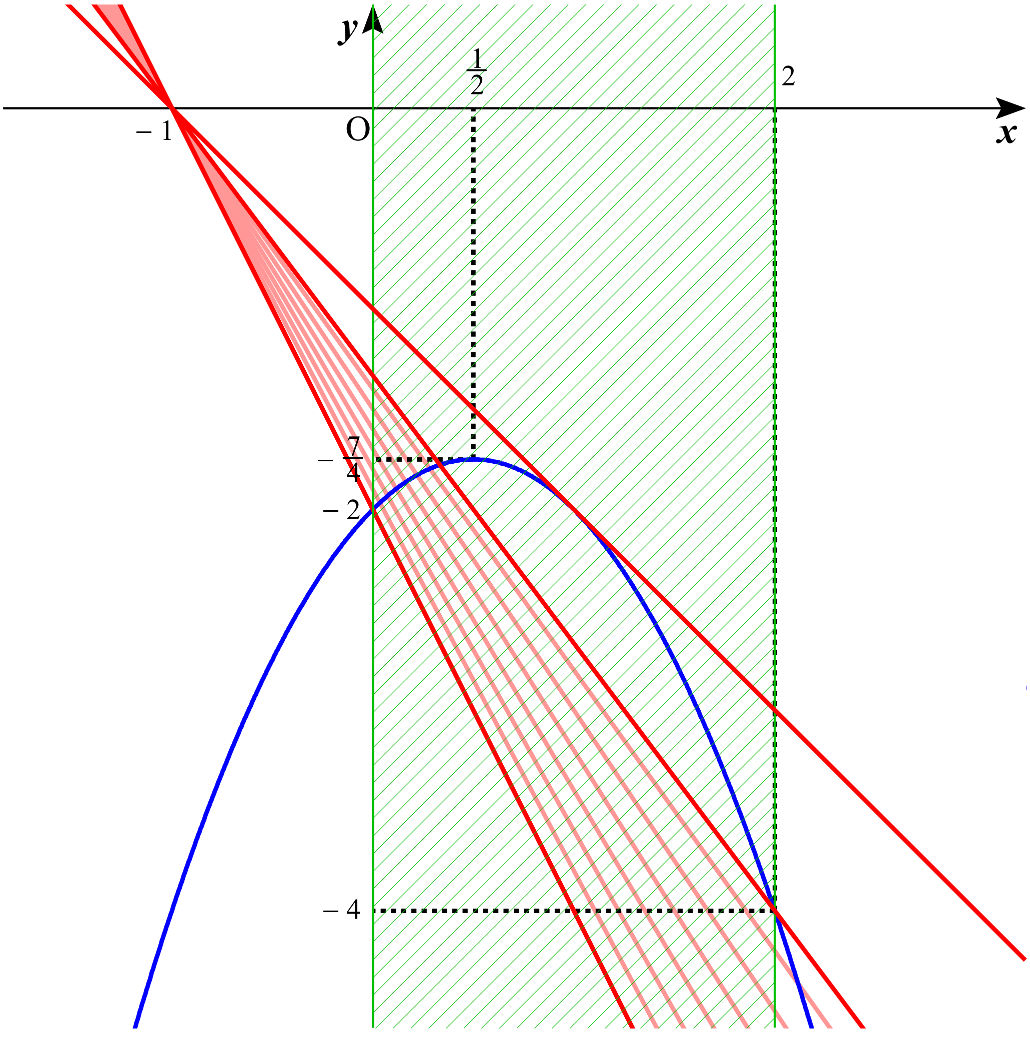
$y=a(x+1)$ ・・・②，$y=-x^2+x-2$ ・・・③ とすると，

直線②と放物線③が $0\leq x\leq 2$ の範囲にただ 1 つ共有点をもつような a の値の範囲をグラフから求めればよい。

②は定点 $(-1,\ 0)$ を通る直線

③は $(0,\ -2)$，$(2,\ -4)$ を通る放物線で，$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$ と変形できることから，

その頂点の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{4}\right)$



よって，グラフは上図のようになる。

したがって，傾き a の値は②が $(0,\ -2)$ を通るときの傾き以上かつ $(2,\ -4)$ を通るときの傾き未満であるか，③と接する負の傾きであればよい。

②がを通るときの傾き

$-2=a(0+1)$ より，　$a=-2$

②が $(2,\ -4)$ を通るときの傾き

$-4=a(2+1)$ より，　$a=-\dfrac{4}{3}$

②が③と接するときの負の傾き

①が重解をもつのと同値だから，①の判別式を D とすると，

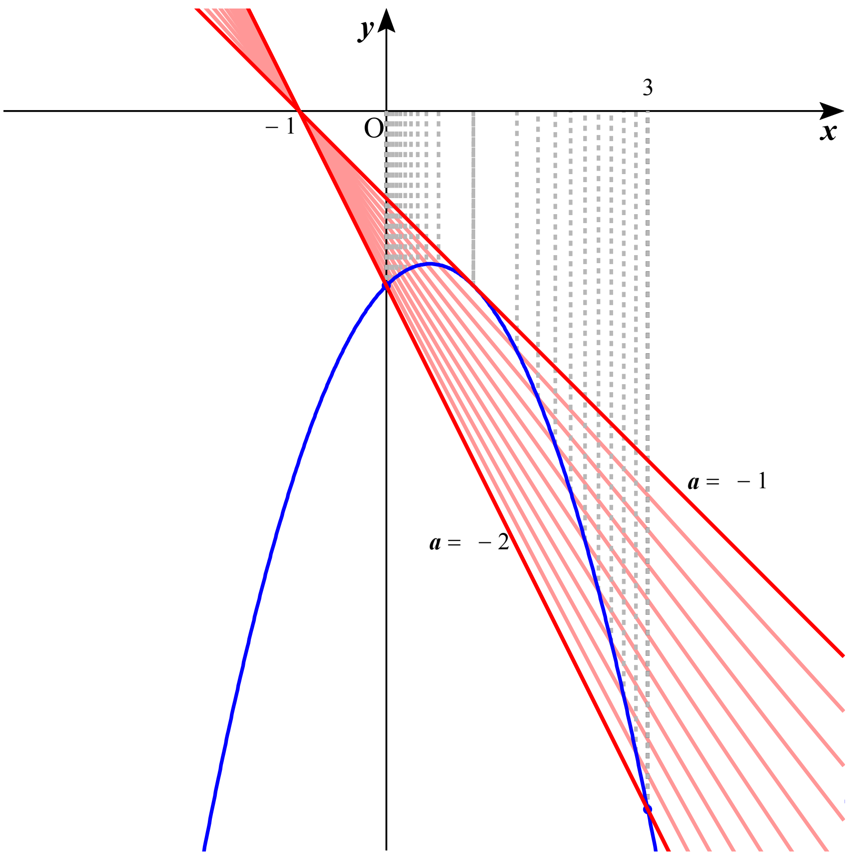
$$
\begin{aligned}
D&=(a-1)^2-4(a+2)\\
&=a^2-6a-7\\
&=(a+1)(a-7)\\
&=0
\end{aligned}
$$

これと $a<0$ より，　$a=-1$

以上より，　$-2\leq a<-\dfrac{4}{3},\ a=-1$

(2)

下図より，　$0\leq x\leq 3$



解法 2：文字定数を分離し，数学Ⅲで解く

$x=-1$ は①の解ではないから，①を $a=\dfrac{-x^2+x-2}{x+1}$ と変形できる。

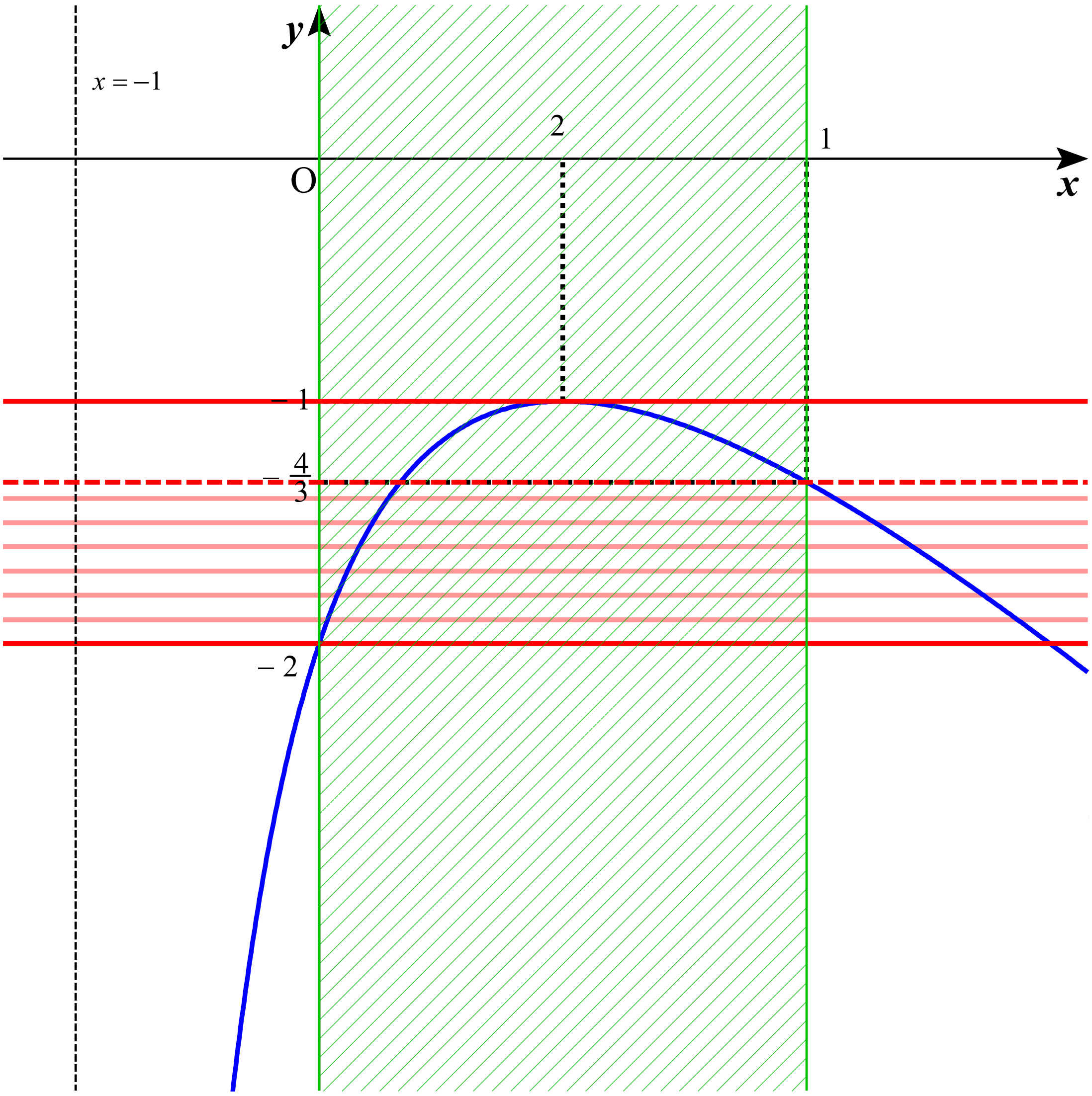
ここで，$y=f(x)=\dfrac{-x^2+x-2}{x+1}$ とおき，

$0\leq x\leq 2$ における $y=a$ と $y=f(x)$ の共有点の数を調べる。

$f'(x)=-\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ より，$-1<x$ における $f(x)$ の増減は次のようになる。

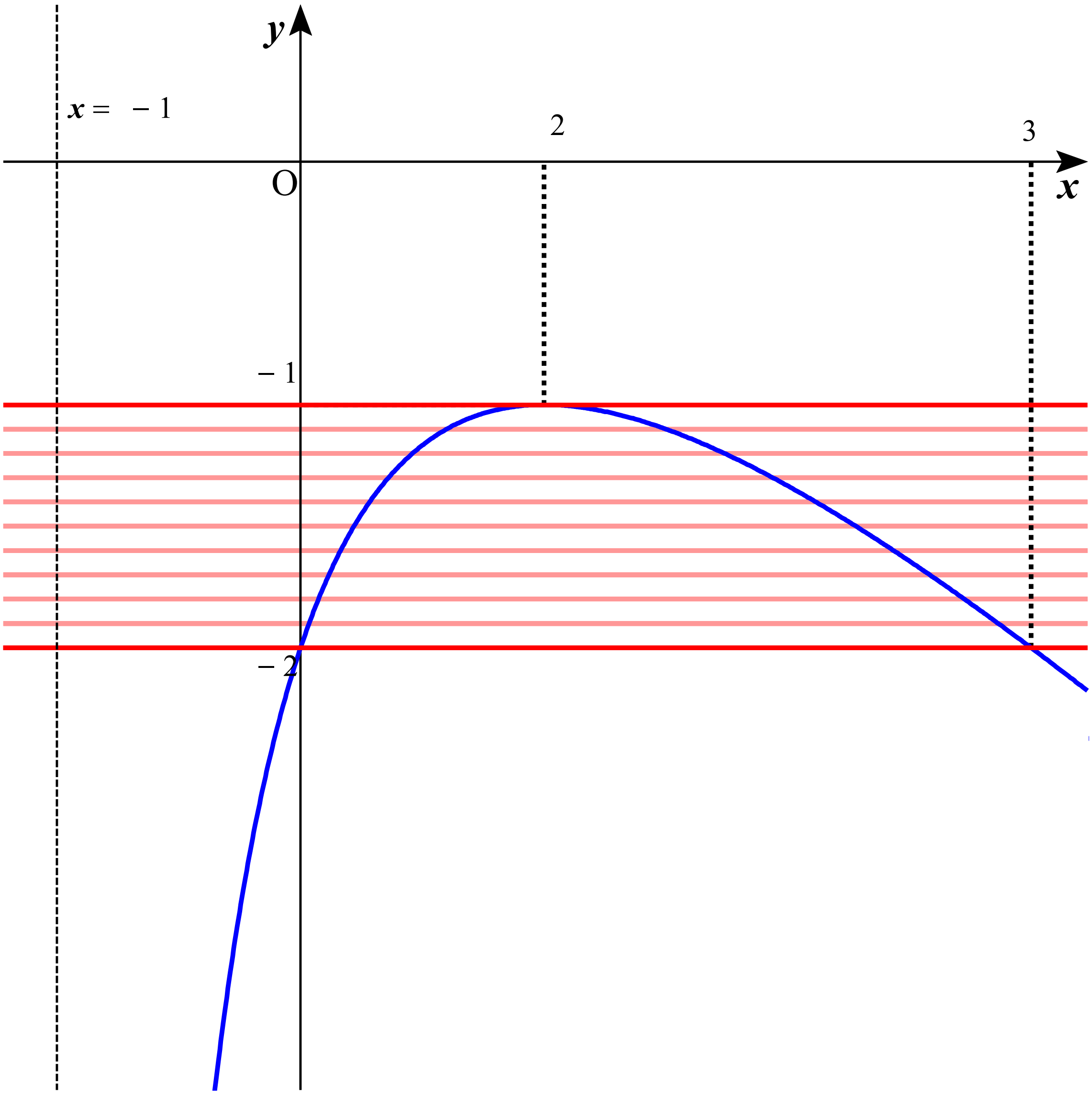
x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	/	$+$	0	$-$
$f(x)$	/	$\uparrow$	-1	$\downarrow$

よって，下図グラフから，$a=-1,\ -2\leq a<-\dfrac{4}{3}$



(2)

下図グラフより， $0 \leq x \leq 3$



解法 3：座標横軸（x 軸，a 軸）との共有点問題とみなして解く

(i) 重解をもつとき

重解を α とすると，解と係数の関係より $2\alpha=-(a-1)$ だから，$\alpha=-\dfrac{a-1}{2}$

α が満たすべき条件は $0\leq\alpha\leq2$ だから，$0\leq-\dfrac{a-1}{2}\leq2$　$\therefore -3\leq a\leq1$　・・・②

また，判別式を D とすると，

$$\begin{aligned}D&=(a-1)^2-4(a+2)\\&=a^2-6a-7\\&=(a+1)(a-7)=0\end{aligned}$$

$\therefore a=-1,\ a=7$　・・・③

②かつ③より，$a=-1$　・・・④

(ii) 異なる 2 実数解をもつとき

$y=f(x)=x^2+(a-1)x+a+2$ とすると，$f(x)=\left(x-\dfrac{a-1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)(a-7)}{4}$

$y=f(x)$ は下に凸の放物線で，x 軸と 2 つの異なる共有点をもつから，

$-\dfrac{(a+1)(a-7)}{4}<0$　$\therefore a<-1,\ 7<a$　・・・⑤

(ii)-1 共有点が $x=0$ または $x=2$ のとき

共有点が $x=0$ のとき

$f(0)=a+2=0$ より，$a=-2$　・・・⑥

よって，$f(x)=x^2-3x=x(x-3)$ より，もう 1 つの共有点は $x=3$

よって，条件を満たす。

共有点が $x=2$ のとき

$f(2)=3a+4=0$ より，$a=-\dfrac{4}{3}$

よって，$f(x)=x^2-\dfrac{7}{3}x+\dfrac{2}{3}=\dfrac{3x^2-7x+2}{3}=\dfrac{(3x-1)(x-2)}{3}$ より，

もう 1 つの共有点は $x=\dfrac{1}{3}$

よって，不適

(ii)-2 共有点が $0 < x < 2$ の範囲にあるとき

$f(0)f(2) < 0$ より，$(a+2)(3a+4) < 0$　$\therefore -2 < a < -\dfrac{4}{3}$　・・・⑦

（⑤かつ⑥）または（⑤かつ⑦）より，$-2 \leq a < -\dfrac{4}{3}$

(i)，(ii)より，$a = -1,\ -2 \leq a < -\dfrac{4}{3}$

(2)

①が実数解をもつ条件は，判別式を D とすると，$D = (a+1)(a-7) \geq 0$ より，$a \leq -1,\ 7 \leq a$
よって，$-2 \leq a \leq -1$ は①が実数解をもつための十分条件である。
そこで，①を a について整理し，直線 $y = g(a) = (x+1)a + x^2 - x + 2$ を考えと，
$-2 \leq a \leq -1$ において a 軸と共有点をもつ実数 x が存在することになる。
すなわち $g(-2)g(-1) \leq 0$ が成り立つ。
これと

$$
\begin{aligned}
g(-2)g(-1) &= (x^2 - 3x)(x^2 - x + 2) \\
&= x(x-3)(x^2 - x + 2) \\
&= x(x-3)\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right\}
\end{aligned}
$$

より，$x(x-3) \leq 0$　$\therefore 0 \leq x \leq 3$

57

解法 1

$y=f(x)=x^2-nx+m$ とおくと，
$y=f(x)$が $x\geq N$ の範囲で x 軸と少なくとも 1 つの共有点をもてばよい。

$f(x)=\left(x-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{n^2}{4}+m$ より，　$y=f(x)$の軸は $x=\frac{n}{2}$ である。

$\frac{n}{2}\leq N$ のとき

$f(N)\leq 0$ であればよいから，　$N^2-nN+m\leq 0$　　$\therefore m\leq nN-N^2$

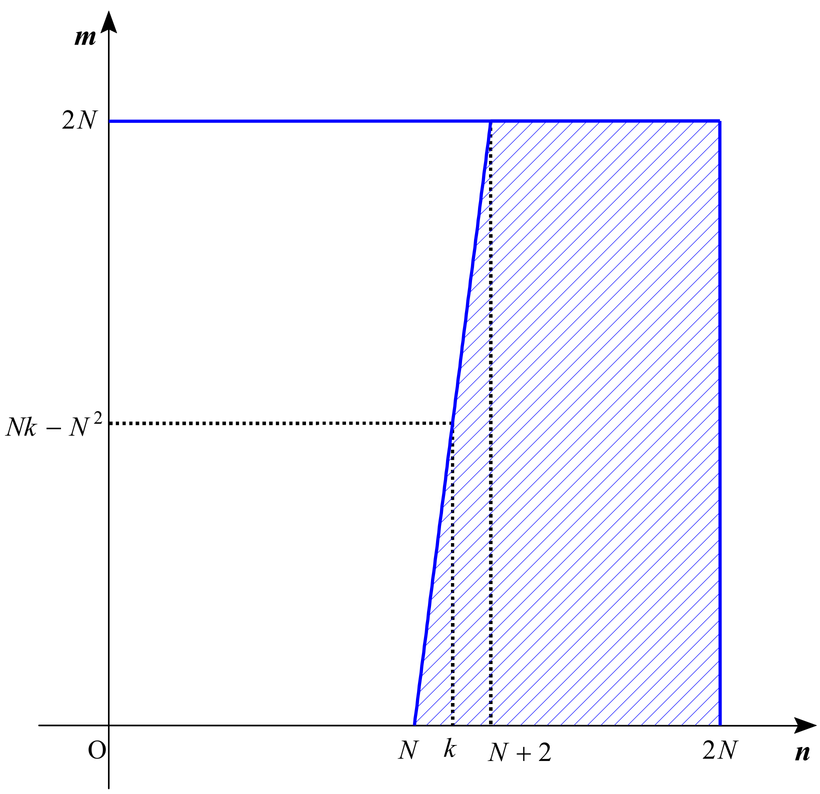
$\frac{n}{2}>N$ のとき

条件より，　$0<n\leq 2N$ だから，　$\frac{n}{2}\leq N$

よって，不適

したがって，縦軸を m，横軸を n とする座標平面上の，$1\leq m\leq 2N,\ 1\leq n\leq 2N,\ m\leq Nn-N^2$ を満たす領域における格子点$(n,\ m)$の数を求めればよい。

$m=2N$ と $m=Nn-N^2$ の共有点の n 座標は，
$2N=Nn-N^2$ より，　$N\{n-(N+2)\}=0$　　$\therefore n=N+2$
そこで，　$N+2\leq 2N$ と $2N<N+2$ で場合分けして，格子点の数を求めることにする。
$N+2\leq 2N$　すなわち $N\geq 2$ のとき



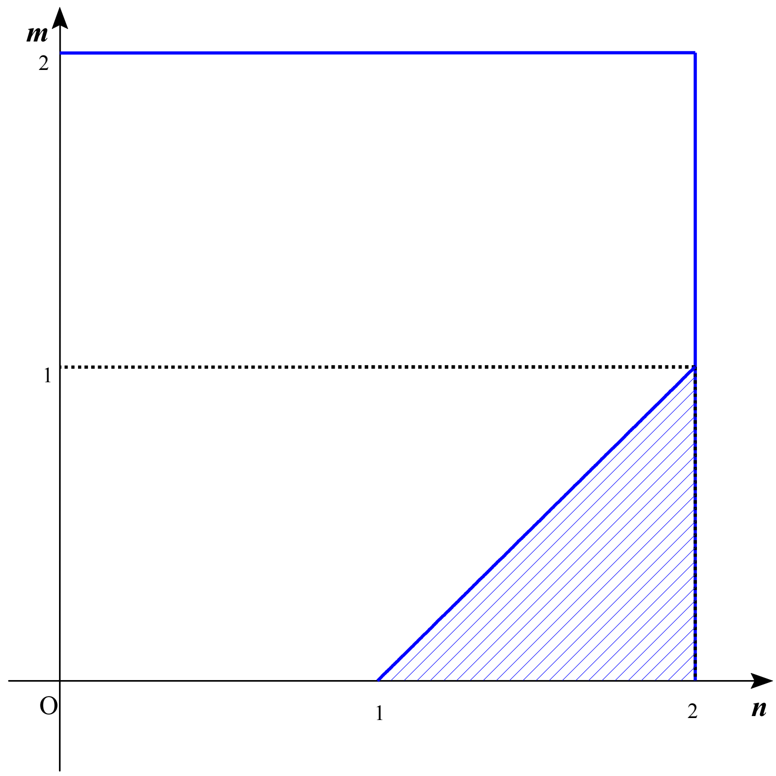
図より，

$$\sum_{k=N}^{N+2}\left(Nk-N^2\right)+2N\{2N-(N+3)+1\}=N\sum_{k=N}^{N+2}k-3N^2+2N(N-2)$$
$$=N\cdot\frac{N+(N+2)}{2}\cdot 3-3N^2+2N(N-2)$$
$$=2N^2-N$$

$N+2>2N$　すなわち $N=1$ のとき

$1\leq m\leq 2,\ 1\leq n\leq 2,\ m\leq n-1$ を満たす格子点は $(n,\ m)=(2,\ 1)$ の 1 つである。

よって，$2N^2-N$ は $N=1$ のときも成り立つ。



以上より，格子点の数は $2N^2-N$

ゆえに，$(m,\ n)$ の組の数は $2N^2-N$

解法 2

$x^2-nx+m=0$ の 2 実数解を $\alpha,\ \beta$ とする。

【1】 $\alpha>N,\ \beta>N$ のとき

$\alpha+\beta>2N$，解と係数の関係より $\alpha+\beta=n$　$\therefore n>2N$

これは n が $2N$ 以下の整数であることに反するから $\alpha>N,\ \beta>N$ は不適である。

【2】 $\alpha=N$ のとき

$x^2-nx+m=0$ の判別式を D とすると，$D\geq 0$ より，$n^2-4m\geq 0$　・・・①

解と係数の関係より，$N+\beta=n,\ N\beta=m$　・・・②

①，②より，$(N+\beta)^2-4N\beta=(N-\beta)^2\geq 0$　$\therefore \beta=N$

ゆえに，N を実数解にもつとき，その解は重解であり，これより $n=2N,\ m=N^2$

これと $1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ より，$1\leq 2N\leq 2N,\ 1\leq N^2\leq 2N$　$\therefore N=1,\ 2$

ゆえに，$(n,\ m)$ は $(2,\ 1),\ (2,\ 4)$ の 2 組

【3】 N が α と β の間の数のとき

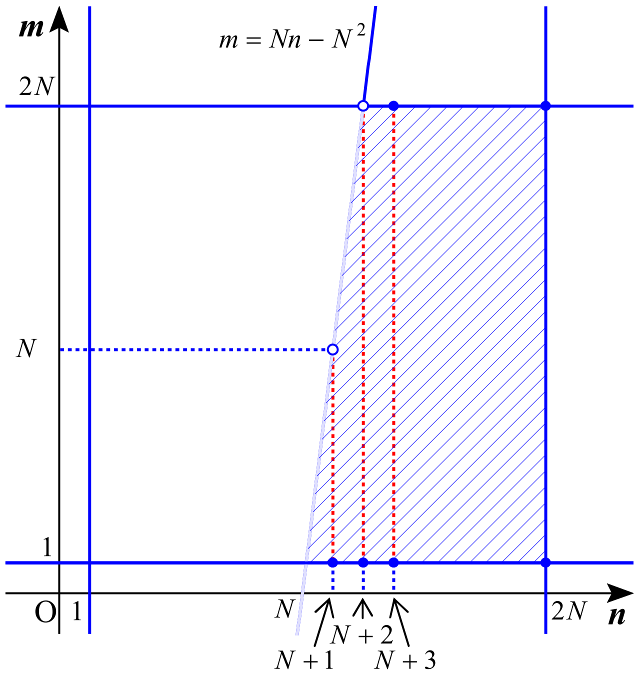
$y=x^2-nx+m$ と x 軸の共有点の x 座標と $x^2-nx+m=0$ の解が一致するから，

中間値の定理より，$N^2-nN+m<0$　$\therefore m<Nn-N^2$

したがって，$m=Nn-N^2$ を m を n の関数と見て，$m<Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N$，$1\leq m\leq 2N$ を満たす領域の格子点の数，すなわち $(n,\ m)$ の組の数を求めればよい。

よって，図より，$(n,\ m)$ の組の数は

$\{(N-1)-1+1\}+\{(2N-1)-1+1\}+(2N-1+1)\{2N-(N+3)+1\}=2N^2-N-2$



【1】～【3】より，$(m,\ n)$ の組の総数は $2+2N^2-N-2=2N^2-N$　・・・(答)

解法 3

$x^2-nx+m=0$ の判別式を D とすると，

実数解条件は $D=n^2-4m\geq 0$　$\therefore m\leq\dfrac{n^2}{4}$　・・・①

①が成り立つ下で，2 つ実数解がいずれも N より小さいときの必要十分条件を求める。

2 つ実数解を $\alpha,\ \beta$ とすると，$\alpha<N,\ \beta<N$ より，$\alpha-N<0,\ \beta-N<0$

$\alpha-N<0,\ \beta-N<0$ と $(\alpha-N)+(\beta-N)<0,\ (\alpha-N)(\beta-N)>0$ は必要十分の関係であり，

解と係数の関係より，$\alpha+\beta=n,\ \alpha\beta=m$ であることから，

2 つ実数解がいずれも N より小さいときの必要十分条件は

$(\alpha-N)+(\beta-N)=(\alpha+\beta)-2N=n-2N<0$　$\therefore n<2N$　・・・②

$(\alpha-N)(\beta-N)=\alpha\beta-N(\alpha+\beta)+N^2=m-Nn+N^2>0$　$\therefore m>Nn-N^2$　・・・③

より，

②かつ③が，すなわち $(n<2N)\cap(m>Nn-N^2)$　・・・④　が成り立つことである。

少なくとも 1 つの解が N 以上であるための条件を求める。

条件は $①\cap\overline{④}$ （$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ ）

これと

$$\begin{aligned}\overline{④}&=\overline{(n<2N)\cap(m>Nn-N^2)}\\&=\overline{(n<2N)}\cup\overline{(m>Nn-N^2)}\\&=(n\geq 2N)\cup(m\leq Nn-N^2)\end{aligned}$$

より，

$$①\cap\overline{④}=\left(m\leq\frac{n^2}{4}\right)\cap\{(n\geq 2N)\cup(m\leq Nn-N^2)\}$$

これに条件 $1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ を加えることにより，

条件は，$m\leq\dfrac{n^2}{4}$，$m\leq Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$

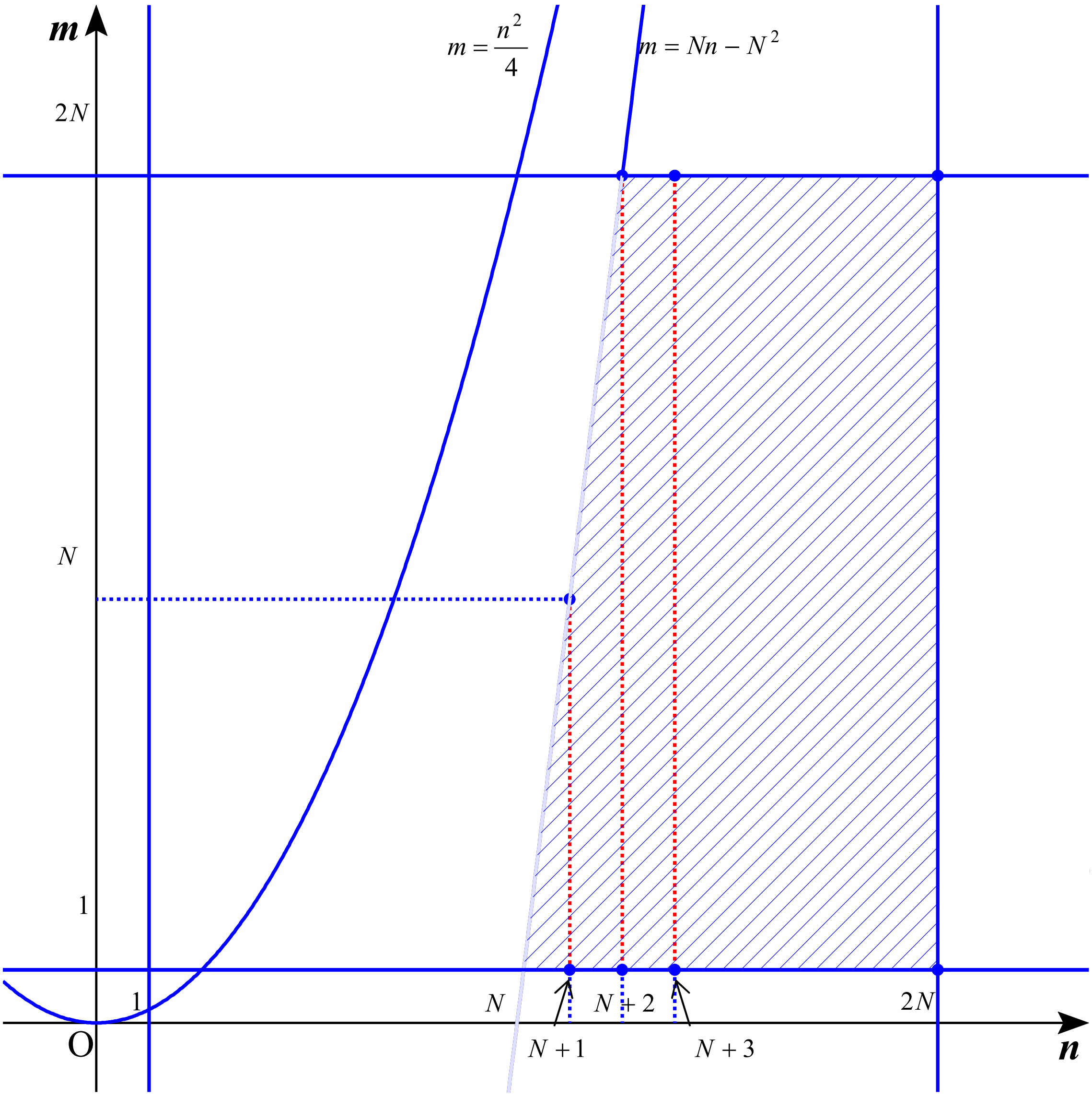
$(m,\ n)$ の組の数

$m\leq\dfrac{n^2}{4}$，$m\leq Nn-N^2$，$1\leq n\leq 2N,\ 1\leq m\leq 2N$ を nm 座標平面上に表し，

格子点の数，すなわち $(m,\ n)$ の組の数を求めればよい。

よって，次ページの図の斜線部の格子点の数より，$(m,\ n)$ の組の数は

$\{(N-1)+1\}+(2N-1+1)\{2N-(N+2)+1\}=2N^2-N$　・・・(答)



m
$m = \frac{n^2}{4}$
$m = Nn - N^2$
2N
N
1
1
O
N
N+1
N+2
N+3
2N
n

58

解法１

$$(s+t)^2=s^2+t^2+2st$$
$$=1+2st$$

$$\therefore 2st=(s+t)^2-1$$

よって，

$$(s-t)^2=(s+t)^2-4st$$
$$=(s+t)^2-2\{(s+t)^2-1\}$$
$$=2-(s+t)^2$$

$s+t=u$ とおくと，$(s-t)^2=2-u^2$

したがって，与えられた方程式は u を用いて $x^4-2ux^2+2-u^2=0$ と表せる。

ここで，u すなわち $s+t$ がとる値の範囲を求めると，

条件より，$s=\cos\theta,\ t=\sin\theta\ \left(0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおけるから，$s+t=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore 1\leq u\leq\sqrt{2}$$

よって，$1\leq u\leq\sqrt{2}$ のとき $x^4-2ux^2+2-u^2=0$ の解のとる値の範囲を求めればよい。

$x^4-2ux^2+2-u^2=0\ \left(1\leq u\leq\sqrt{2}\right)$ を満たす実数解を $x=\gamma$ とすると，

$x=\gamma$ のとき u の 2 次方程式 $u^2+2x^2u-x^4-2=0$ は $1\leq u\leq\sqrt{2}$ の範囲に解をもつ。

したがって, u の 2 次方程式 $u^2+2x^2u-x^4-2=0$ が $1\leq u\leq\sqrt{2}$ において少なくとも 1 つの解をもつような x の値の範囲を求めればよい。

つまり，$y=f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2$ とおくと，$y=f(u)$ と u 軸との共有点が $1\leq u\leq\sqrt{2}$ において少なくとも 1 つ存在するような x の値の範囲を求めればよい。

$$f(u)=u^2+2x^2u-x^4-2$$
$$=(u+x^2)^2-2x^4-2$$

より，

軸 $u=-x^2\leq 0$

$$f(1)=1+2x^2-x^4-2$$
$$=-(x^4-2x^2+1)$$
$$=-(x^2-1)\leq 0$$

よって，求める x の値の範囲は $f\left(\sqrt{2}\right)\geq 0$ すなわち $2+2\sqrt{2}x^2-x^4-2\geq 0$ の解である。

$2+2\sqrt{2}x^2-x^4-2=-x^2\left(x^2-2^{\frac{3}{2}}\right)\geq 0$ より，$x^2\left(x^2-2^{\frac{3}{2}}\right)\leq 0$

よって，$x^2-2^{\frac{3}{2}}\leq 0$ 　すなわち $-2^{\frac{3}{4}}\leq x\leq 2^{\frac{3}{4}}$

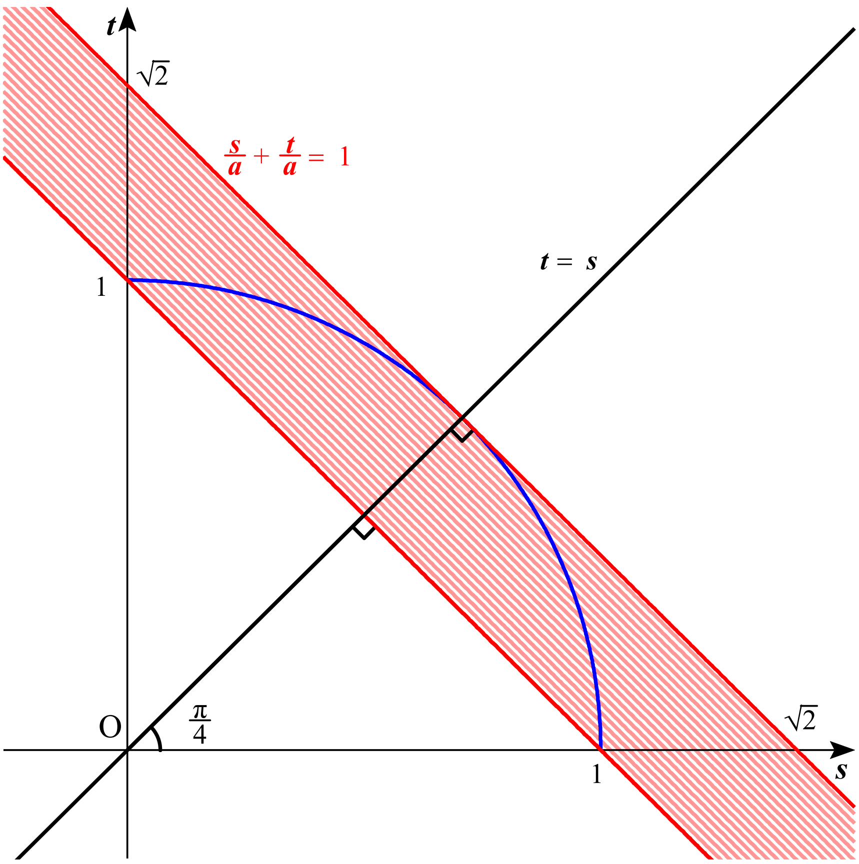
補足

u すなわち $s+t$ がとる値の範囲を切片方程式から求めると，

$s^2+t^2=1\ (s\geq 0,\ t\geq 0)$ と共有点をもつ切片方程式を $\dfrac{s}{a}+\dfrac{t}{a}=1$ とすると， $s+t=a$

次図より， $1\leq a\leq\sqrt{2}$

よって， $1\leq s+t\leq\sqrt{2}$



解法 2：数学Ⅲを使う（理系は得）

$x^2 = X$ とおくと，$X^2 - 2(s+t)X + (s-t)^2 = 0$

解の公式より，

$$X = s + t \pm \sqrt{(s+t)^2 - (s-t)^2}$$
$$= s + t \pm \sqrt{4st}$$

ここで，

$$(s+t)^2 = s^2 + t^2 + 2st$$
$$= 1 + 2st$$

より，$4st = 2\{(s+t)^2 - 1\}$

$$\therefore X = s + t \pm \sqrt{2\{(s+t)^2 - 1\}}$$

$s + t = u$ とおくと，$X = u \pm \sqrt{2}(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$

また，条件より，$s = \cos\theta,\ t = \sin\theta\ \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right)$ とおけるから，

$s + t = \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad \therefore 1 \le u \le \sqrt{2}$

よって，$f(u) = u + \sqrt{2}(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$，$g(u) = u - \sqrt{2}(u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ とおき，

$1 \le u \le \sqrt{2}$ におけるそれぞれの増減を調べることにより，X の値の範囲が求められる。

$1 < u < \sqrt{2}$ において

$$f'(u) = 1 + \sqrt{2}(u^2 - 1)' \cdot \frac{1}{2} \cdot (u^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= 1 + \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{u^2 - 1}} > 0$$

$$g'(u) = 1 - \frac{\sqrt{2}u}{\sqrt{u^2 - 1}}$$
$$= 1 - \sqrt{\frac{2u^2}{u^2 - 1}}$$
$$= 1 - \sqrt{2 + \frac{2}{u^2 - 1}} < 0$$

よって，$1 \le u \le \sqrt{2}$ において，$f(u)$ は単調に増加し $g(u)$ は単調に減少する。

これと $f(1) = 1,\ f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2},\ g(1) = 1, g(\sqrt{2}) = 0$ より，$1 \le f(u) \le 2\sqrt{2},\ 0 \le g(u) \le 1$

よって，$0 \le X \le 2\sqrt{2}$　すなわち $0 \le x^2 \le 2\sqrt{2}$　$\therefore -2^{\frac{3}{4}} \le x \le 2^{\frac{3}{4}}$